NTMF036

INTERPRETACE KVANTOVÉ MECHANIKY

Shrnutí 4. přednášky

Pavel Krtouš

Shrnutí formalismu

- kvantový stav
  - maximální možná znalost systému
  - $|\text{stav}\rangle$ – vektor v Hilbertově prostoru

- kvantová pozorovatelná
  - kóduje výsledné hodnoty a stavy měření kompatibilních vlastností
  - $\hat{A}$ – hermitovský operátor

$$\hat{A} = \sum_a a\,\hat{P}_a \quad \leftrightarrow \quad \text{projektory } \hat{P}_a \text{ odpovídající hodnotám } a \in I$$

- střední hodnota pozorovatelné $\hat{A}$ pro stav $|\text{stav}\rangle$

$$\langle \text{stav} | \hat{A} | \text{stav} \rangle$$

Vývoj systému

- proces I – volný vývoj

$$|\mathrm{st}\, t_0\rangle \qquad \rightarrow \qquad |\mathrm{st}\, t_0\rangle = \hat{U}(t|t_0)|\mathrm{st}\, t_0\rangle$$

- proces II – redukce (kolaps) stavu

$$|\mathrm{st}\rangle \qquad \rightarrow \qquad \begin{cases} |\mathrm{red}\, a\rangle = \hat{P}_a|\mathrm{st}\rangle & a & p(a) = \langle \mathrm{st}|\hat{P}_a|\mathrm{st}\rangle \\ & \vdots & \\ & \vdots & \end{cases}$$

Statistická směs

- ***směs*** = statistický soubor kvantově rozlišitelných
  ale klasicky nerozlišovaných stavů

$$\mathcal{S} = \{|\mathrm{st}\ 1\rangle, |\mathrm{st}\ 2\rangle, |\mathrm{st}\ 3\rangle, \dots\} \qquad\qquad p_k = \langle \mathrm{st}\ k|\mathrm{st}\ k\rangle$$

- měření bez čtení výsledku

$$|\mathrm{stav}\rangle \quad \to \quad \mathcal{R} = \{\, |m\rangle\langle m|\mathrm{stav}\rangle \,\}_{m\in I}$$

- střední hodnota pozorovatelné pro směs $\mathcal{S}$

$$\langle\hat{A}\rangle = \sum_k \langle \mathrm{st}\ k|\hat{A}|\mathrm{st}\ k\rangle$$ – vážený průměr středních hodnot

Efektivní popis statistické směsi

- střední hodnota pozorovatelné pro směs $\mathcal{S}$

$$\langle \hat{A} \rangle = \mathrm{Tr}\big(\hat{A}\,\widehat{D}\big)$$

- směs $\mathcal{S}$ popsaná *operátorem hustoty*

$$\widehat{D} = \textstyle\sum_k |\mathrm{st}\ k\rangle\langle \mathrm{st}\ k| \qquad \text{normalizace:} \quad p(k) = \langle \mathrm{st}\ k|\mathrm{st}\ k\rangle$$

Skládání systémů – stavy

‚svět‘ skládající se ze dvou podsystémů (systém $\mathscr{s}$ a přístroj $\mathscr{a}$)

- nekorelované stavy

$$|\mathscr{s}{:}\nearrow\rangle|\mathscr{a}{:}-\rangle$$

- korelované stavy

$$\alpha_{\uparrow}\,|\mathscr{s}{:}\uparrow\rangle\,|\mathscr{a}{:}\dot{-}\rangle\;+\;\alpha_{\downarrow}\,|\mathscr{s}{:}\downarrow\rangle\,|\mathscr{a}{:}\underset{\cdot}{-}\rangle$$

- obecný případ

$$\sum_{m,\mu}\alpha_{m,\mu}\,|\mathscr{s}{:}\,m\rangle\,|\mathscr{a}{:}\,\mu\rangle$$

Skládání systémů – pozorovatelné

‚svět' skládající se ze dvou podsystémů (systém $\mathscr{s}$ a přístroj $\mathscr{a}$)

- pozorovatelné na $\mathscr{s}$

$$\hat{A} = \hat{A}_{\mathscr{s}} \otimes \hat{\mathbb{1}}_{a}$$

- pozorovatelné na $\mathscr{a}$

$$\hat{B} = \hat{\mathbb{1}}_{\mathscr{s}} \otimes \hat{B}_{a}$$

- obecná pozorovatelná – není součinového typu!

$$\hat{Q} = \sum_{m,\mu} \hat{A}_{\mathscr{s}m} \otimes \hat{B}_{a\mu}$$

Jak ‚rozkládat' systém na části?

- nekoherentní složení

$$|\mathscr{s}:\nearrow\rangle|\sigma:\#\rangle \qquad \leftrightarrow \qquad |\mathscr{s}:\nearrow\rangle \quad \text{a} \quad |\sigma:\#\rangle$$

- korelovaný stav celého systému

$$\sum_{m,\mu}\alpha_{m,\mu}|\mathscr{s}:m\rangle|\sigma:\mu\rangle \qquad \leftrightarrow \qquad ?$$

- Lze nalézt popis, který by vystihoval všechna měření v části $\mathscr{s}$?

Restrikce na podsystém

stav celého systému

$$\hat{D}$$

pozorovatelné na $\mathcal{s}$

$$\hat{A} = \hat{A}_{\mathcal{s}} \otimes \hat{\mathbb{1}}_{\mathcal{o}}$$

efektivní popis části $\mathcal{s}$ pomocí operátoru hustoty

$$\hat{D}\Big|_{\mathcal{s}} = \mathrm{Tr}_{\mathcal{H}_{\mathcal{o}}} \hat{D}$$

platí

$$\mathrm{Tr}\, \hat{A}\hat{D} = \mathrm{Tr}_{\mathcal{H}_{\mathcal{s}}} \hat{A}_{\mathcal{s}}\, \hat{D}|_{\mathcal{s}} \qquad \langle \hat{A} \rangle = \langle \hat{A}_{\mathcal{s}} \rangle_{\mathcal{s}}$$

Restrikce na podsystém

- restrikce čistého stavu na podsystém není obecně čistý stav

$$|\mathrm{st}\rangle \leftrightarrow \hat{D} = |\mathrm{st}\rangle\langle\mathrm{st}| \qquad \rightarrow \qquad \hat{D}|_{\mathcal{S}} = \mathrm{Tr}_{\mathcal{H}_{\mathcal{O}}} \hat{D} \qquad S > 0$$

  - čím větší korelace částí
  - tím větší ztráta informace při restrikci
  - tím ‚smíšenější' stav po restrikci

Restrikce na podsystém

- restrikce čistého stavu na podsystém není obecně čistý stav

  $|\mathrm{st}\rangle \leftrightarrow \hat{D} = |\mathrm{st}\rangle\langle\mathrm{st}| \quad \rightarrow \quad \hat{D}|_{\mathscr{s}} = \mathrm{Tr}_{\mathcal{H}_{\sigma}} \hat{D} \quad S > 0$

- nekorelované stavy

  $|\mathrm{st}\rangle = |\mathscr{s}: \nearrow\rangle|\sigma: \#\rangle \quad \rightarrow \quad \hat{D}|_{\mathscr{s}} = |\mathscr{s}: \nearrow\rangle\langle\mathscr{s}: \nearrow| \quad S = 0$

- korelovaný stav

  $|\mathrm{kor}\rangle \quad \rightarrow \quad \hat{D}|_{\mathscr{s}} \quad S > 0$

- entanglovaný (propletený) stav

  $|\mathrm{ent}\rangle = \sum_m |\mathscr{s}: m\rangle\, |\sigma: m\rangle \quad \rightarrow \quad \hat{D}|_{\mathscr{s}} = \frac{1}{N}\hat{\mathbb{1}} \quad S = \log N$

Relativní stavy

- ortonormální báze $|\mathscr{p}\!: n\rangle$ v jedné části systému
- jednoznačnost rozkladu stavu celého systému vůči této bázi

$$|\mathrm{st}\rangle = \sum_n |\ell\!: \mathrm{st}/n\rangle\, |\mathscr{p}\!: n\rangle$$

- relativní stav ke stavu $|\mathscr{p}\!: n\rangle$

$$|\ell\!: \mathrm{st}/n\rangle = \langle \mathscr{p}\!: n|\mathrm{st}\rangle$$

  - dán tzv. částečným skalárním součinem dávajícím výsledek z $\mathcal{H}_\ell$
  - obecně nenormovaný stav
  - pro různé n nejsou nutně různé či ortogonální

Schmidtova dekompozice

stav celého systému: $|\mathrm{st}\rangle \in \mathcal{H}_\ell \otimes \mathcal{H}_{\wp}$

existuje dekompozice na ortonormální stavy $|\ell\colon n\rangle$ a $|\wp\colon n\rangle$

$$|\mathrm{st}\rangle = \sum_m \sqrt{p_n}\, |\ell\colon n\rangle\, |\wp\colon n\rangle$$

taková, že

$\hat{D}|_\ell = \mathrm{Tr}_{\mathcal{H}_\wp} |\mathrm{st}\rangle\langle\mathrm{st}| = \sum_n p_n |\ell\colon n\rangle\langle\ell\colon n|$

$|\ell\colon \mathrm{st}/n\rangle = \langle\wp\colon n|\mathrm{st}\rangle = \sqrt{p_n}\, |\ell\colon n\rangle$

$\hat{D}|_\wp = \mathrm{Tr}_{\mathcal{H}_\ell} |\mathrm{st}\rangle\langle\mathrm{st}| = \sum_n p_n |\wp\colon n\rangle\langle\wp\colon n|$

$|\wp\colon \mathrm{st}/n\rangle = \langle\ell\colon n|\mathrm{st}\rangle = \sqrt{p_n}\, |\wp\colon n\rangle$